

**EPFL**

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Echéance : vendredi 5 décembre 2025
Durée : 90 minutes

3

Oscillateur sur plan incliné

NOM:

PRENOM:

N° SCIPER:

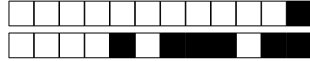
SECTION: **Mathématiques**

SALLE:

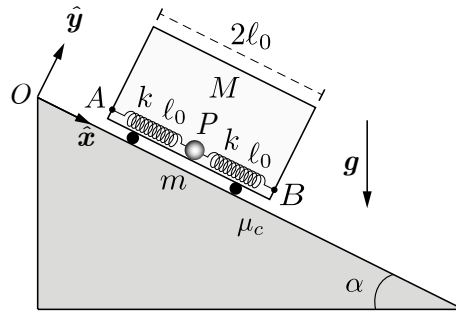
L'exercice à rendre comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques sont à effectuer sur les pages quadrillées.

Consignes

- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Les **réponses** sont à retranscrire sur les pointillés sous chaque question dans l'espace réservé à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas corrigées**.



3. Oscillateur sur plan incliné



Un wagon de masse M et de longueur $2\ell_0$ se déplace le long d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale avec un frottement sec caractérisé par un coefficient de frottement cinétique constant μ_c qui satisfait la condition,

$$\mu_c \geq \tan \alpha$$

Un point matériel P de masse m est attaché à deux ressorts identiques de masse négligeable, de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0 , fixés aux points A et B sur les parois arrière et avant du wagon respectivement. Le point matériel P peut glisser sans frottement sur le sol du wagon le long du plan incliné. Il a un mouvement relatif rectiligne dans le référentiel relatif du wagon. Le wagon et le point matériel sont soumis au champ gravitationnel terrestre g .

Pour décrire la dynamique du système formé du wagon et du point matériel P , on prend un repère cartésien (\hat{x}, \hat{y}) attaché à l'origine O choisie au haut du plan incliné. Ce repère est fixe par rapport au référentiel d'inertie absolu \mathcal{R} du plan incliné. On prend un repère cartésien (\hat{x}, \hat{y}) attaché au point A . Ce repère est mobile par rapport au référentiel d'inertie absolu \mathcal{R} du plan incliné et fixe par rapport au référentiel accéléré relatif \mathcal{R}' du wagon. Le vecteur position absolue $r_a(A)$ et le vecteur position relative $r_r(P)$ s'écrivent,

$$r_a(A) = OA = X \hat{x} + Y \hat{y} \quad \text{où} \quad Y = \text{cste} \quad \text{et} \quad r_r(P) = AP = x \hat{x}$$

La masse et le moment d'inertie des roues du wagon sont négligeables. Le mouvement du wagon (c'est-à-dire du point A) peut donc être considéré comme celui d'un point matériel. La masse M du wagon vide est très grande par rapport à la masse m du point matériel, c'est-à-dire $m \ll M$. Dans cette approximation, l'influence du mouvement du point matériel sur le mouvement du wagon est négligeable. Le mouvement du wagon peut donc être étudié en négligeant simplement la masse m du point matériel. La réciproque n'est pas vraie.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la coordonnée cartésienne relative x et de ses dérivées temporelles, du vecteur de base \hat{x} , de la masse m , du coefficient de frottement cinétique μ_c , de la constante élastique k , de la longueur à vide ℓ_0 , de l'angle α , de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. En négligeant la masse et le mouvement du point matériel P , montrer que l'accélération absolue $\mathbf{a}_a(A)$ du point A du wagon s'écrit,

$$\mathbf{a}_a(A) = g(\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha) \hat{\mathbf{x}}$$

2. Déterminer le coefficient de frottement cinétique $\mu_{c,0}$ pour lequel le mouvement du wagon est un mouvement rectiligne uniforme en se souvenant qu'on néglige la masse et le mouvement du point matériel P .

$$\mu_{c,0} = \dots\dots\dots$$

3. Déterminer la force élastique résultante \mathbf{F}_e exercée sur le point matériel P .

$$\mathbf{F}_e = \dots\dots\dots$$

4. (1.5 point) Montrer que l'équation du mouvement relatif du point matériel P le long de la ligne de coordonnée relative d'abscisse x dans le référentiel relatif du wagon \mathcal{R}' s'écrit,

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}(x - \ell_0) - \mu_c g \cos \alpha = 0$$

5. Déterminer la coordonnée relative d'équilibre x_0 du point matériel P .

$$x_0 = \dots\dots\dots$$

6. Dans le référentiel relatif \mathcal{R}' du plan incliné, déterminer l'énergie potentielle totale $V(x)$ du point matériel P comme fonction de la coordonnée relative x en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par le point A , et comme référence d'énergie potentielle élastique le centre du wagon, c'est-à-dire le point à équidistance des points A et B . Montrer ensuite explicitement par le calcul la stabilité ou l'instabilité de la coordonnée d'équilibre x_0 .

$$V = \dots\dots\dots$$

7. Déterminer la période d'oscillation T du point matériel P .

$$T = \dots\dots\dots$$

